Curvas no R^2: Teorema da Curvatura Total para Curvas Fechadas Regulares de Classe C^2

Robson Costa Maciel[1], Fabio Nunes da Silva[2]

[1]Discente do Centro das Ciências Exatas (CCET/UFOB, Barreiras-Ba/Brasil), robson.m6826@ufob.edu.br,
[2]Docente do Centro das Ciências Exatas (CCET/UFOB Barreiras-Ba/Brasil), fabionuness@ufob.edu.br

O estudo das curvas planas é essencial para entender suas propriedades topológicas, diferenciais e geométricas. Curvas, como objetos unidimensionais, são investigadas em diversos contextos e têm aplicações em geometrias de qualquer dimensão. A análise dos invariantes geométricos das curvas diferenciáveis destaca a importância de classificá-las conforme suas características. Para curvas fechadas, o teorema da curvatura total é um resultado central, afirmando que a integral da curvatura de uma curva regular de classe C^2 é um número inteiro, representando o número de voltas da curva, relacionando geometria e topologia. Usando o método de estudo dirigido, com encontros semanais, visando a revisão do conteúdo estudado e esclarecimento de dúvidas. O material utilizado para o método, foram livros sobre geometria das curvas especialmente, “Geometria Diferencial das Curvas em R^2”, que abrange de uma maneira mais completa o tema abordado nos estudos, com o acompanhamento de outros livros para amplificar o conhecimento e entendimento. No projeto como foram propostos muitos temas de estudos, dentre eles algumas propriedades do número de rotação de uma curva. Uma breve explicação sobre o número de rotação de uma curva fechada em relação a um ponto P, que mede quantas vezes a curva gira em torno P.Vemos aqui algumas definições importantes. Curva Fechada: α_ζ: Uma função contínua $\alpha_\zeta : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ que define uma curva no plano, com $\alpha_\zeta(a) = \alpha_\zeta(b)$.Deformação Contínua: Uma família de curvas fechadas parametrizadas por $\zeta \in J$, onde cada α_ζ varia continuamente com ζ. Ponto P_ζ: Um ponto no plano, que é fixo para cada ζ, mas varia continuamente em J, e que não pertence ao traço da curva α_ζ.Número de Rotação $W(\alpha_\zeta,\ P_\zeta)$: O número de vezes que a curva α_ζ "dá voltas" em torno do ponto P_ζ. Formalmente, é o índice de P_ζ em relação à curva α_ζ .Teorema: Seja $\alpha_\zeta[a, b] \to \mathbb{R}^2$, uma deformação de curvas fechadas, e $P : J \to\ \mathbb{R}^2$ uma curva contínua tal que, para cada $\zeta \in J$, o ponto $P_\zeta = P(\zeta)$ não pertence ao traço de α_ζ. Então, o numero de rotação $W(\alpha_\zeta,\ P_\zeta)$ não depende de ζ ou seja, W é uma função constante em relação a ζ.O número de rotação de rotação $W(\alpha_\zeta,\ P_\zeta)$ de uma curva fechada α_ζ em reação ao ponto P_ζd é definida como: $W\left(\alpha_\zeta,\ P_\zeta\right) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{(\alpha_\zeta(t) - P_\zeta)\times\ \dot{\alpha}_\zeta(t)}{\left|\alpha_\zeta(t) - P_\zeta\right|^2}$dt. Como α_ζ e P_ζ são funções contínuas de ζ a expressão $W\left(\alpha_\zeta,\ P_\zeta\right)$, também depende continuamente de ζ. Logo, W é uma função continua em ζ.O número de rotação é um número inteiro, pois conta com o número de voltas que a curva α_ζ da em torno do ponto P_ζ. Como $W\left(\alpha_\zeta,\ P_\zeta\right)$ é contínuo e inteiro, ele só pode assumir valores constantes.

Palavras-Chave: Modelo de Resumo, ABNT, SICT.

Agência Financiadora: CNPq.